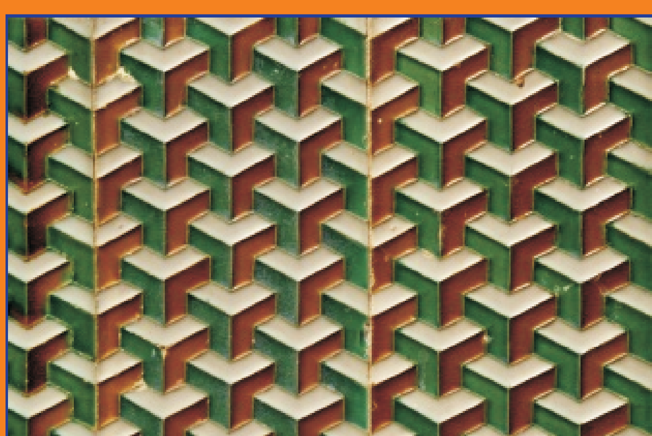
Universidad América Latina

Bachillerato en la Modalidad No Escolarizada y Semiescolarizada

Matemáticas IV

MÓDULO 5



Breviario Temático Integral

UNESCO

SESIÓN 1

UNA INTRODUCCIÓN PRELIMINAR, LOS CONCEPTOS DE RELACIÓN, FUNCIÓN, INTERVALOS Y SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

I. CONTENIDOS:

1. Introducción preliminar
2. El concepto intuitivo y formal de relación
3. El concepto intuitivo y formal de función
4. Nomenclatura de funciones
5. Cálculo del valor de una función
6. Estrategias Centradas en el Aprendizaje: Ejercicios propuestos

II. OBJETIVOS:

- Al término de la Clase, el alumno:
- Comprenderá los fundamentos del porque es importante el estudio del cálculo diferencial

III. PROBLEMATIZACIÓN:

Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- ¿Por qué es importante el análisis de las funciones en el cálculo diferencial?
- ¿En qué hechos cotidianos podemos observar la relación entre dos o más variables?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

1.1. Introducción preliminar

Si hay algo que permanece constante en el universo que nos rodea, es el cambio, efectivamente, los cambios ocurren en todo lo que conocemos del medio, estos pueden ser cíclicos, predecibles, como las estaciones del año, o a veces con cierta incertidumbre como el clima, unos suelen ser rápidos como el movimiento de un auto de carreras en la pista, otros son muy lentos como la evolución geológica de la tierra. Sin embargo a fin de cuentas son cambios.

El cálculo diferencial es esencialmente diferente a las matemáticas que el lector ya ha estudiado en cursos anteriores. El cálculo diferencial no es estático, es dinámico, su interés se centra en el estudio de los cambios, del movimiento, sean estos de cualquier naturaleza, desde la velocidad del crecimiento de una colonia de bacterias hasta la relación de la velocidad de un satélite con el diámetro de la órbita que describe, además trata de cantidades que se aproximan unas a otras. Para este menester resulta de gran utilidad entender una serie de conceptos básicos que servirán como cimiento antes de empezar el estudio formal del cálculo diferencial (para abreviar solo lo llamaremos cálculo), es conveniente que el estudiante repase algunos temas de álgebra, geometría plana, trigonometría y geometría analítica.

2.1. Concepto intuitivo y formal de relación:

Considere el siguiente ejercicio.

En un salón de clases de preparatoria se les pregunta su edad a ocho alumnos, el resultado se registra en la siguiente tabla.

Alumno	Edad (años)
Antonio	20
Rodrigo	19

Roberto	18
Karina	17
Carla	18
Francisco	16
Alicia	17
Gerardo	21

Si llamamos a los alumnos el conjunto A y a sus edades el conjunto B, la tabla da origen a los siguientes pares ordenados.

(Antonio, 18)), (Rodrigo, 19), (Roberto, 18), (Karina, 17), (Carla, 18), (Francisco, 16), (Alicia, 17), (Gerardo, 21)

De acuerdo a este ejercicio podemos ver que a una edad le pueden corresponder uno o más alumnos.

Como se dijo, si los estudiantes forman un conjunto, donde cada uno de ellos es un "elemento" de dicho conjunto y. las edades son otro conjunto donde cada "elemento" es un número, entonces podemos decir que de acuerdo a esto, estos conjuntos pueden ser "relacionados" .

Bajo este orden de ideas, podemos definir a una "relación" como la correspondencia de cada elemento de un conjunto con respecto a uno o mas elementos de un segundo conjunto.

La relación da por resultado la formación de pares ordenados de cualquier tipo de cosas, tales como gráficas, tablas de datos, figuras geométricas, números reales, ecuaciones matemáticas, etc.

Veamos en la siguiente gráfica en la cual se establece una relación.

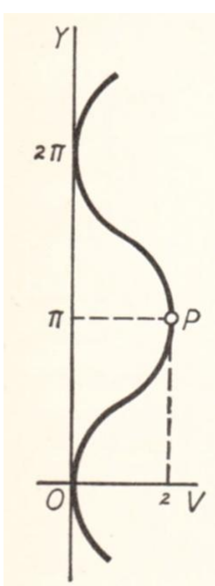


Fig. 1

Observe en la gráfica que cuando "x"" toma el valor Cero "y" toma dos valores π y 2π , se forman dos Pares ordenados:

(0,π) y (0,2π)

Vea que para un solo valor de "x" se establecen dos Valores para "y" formándose de esta manera una Relación.

Un ejemplo matemático de una relación: Considere la siguiente ecuación $y^2 = X^{2\ +}\ 25$ despejando "y", la ecuación queda $y = \pm\sqrt{x^2+25}$ esto quiere decir que a cada valor de "x" asignado le corresponden dos valores para "y", si hacemos x= 0, entonces $y=\pm\sqrt{25}$, $y=\pm 5$, esta correspondencia es una relación.

3.1. El concepto intuitivo y formal de función

En la práctica podemos encontrar situaciones en las que el valor que toma una cantidad depende de otra. Por ejemplo, un médico receta un medicamento en base al peso del paciente, una empresa comercializadora paga a sus comisionistas según el monto de las ventas que realizan, una persona paga un impuesto en base a sus ingresos, la carga vehicular sobre una avenida de una ciudad depende de la hora y día de la semana, el peso que una persona puede levantar dependerá de su fuerza, etc. Así, podríamos enumerar una larga lista de situaciones similares en donde unas cantidades dependen de otras, cuando esto sucede se dice que una cantidad es "función "de otra, esta es una definición intuitiva de este importante concepto en matemáticas.

Una definición más formal de función es la siguiente: Una función *f* es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento y solo uno, llamado "y" o *f(x)* (léase *f* de x), de un segundo conjunto B.

Es importante recalcar que una función debe cumplir con el requisito de esta correspondencia biunívoca, es decir, cuando se asigna un valor a "x", *f(x)* o "y" debe de tomar uno y solo un valor determinado

De acuerdo a lo expuesto, podemos ahora distinguir con toda claridad que, una función es un caso especial de una relación.

4.1. Nomenclatura de funciones

Variables: son cantidades a las que se les puede asignar un número ilimitado de valores a voluntad dentro de los límites de cada problema en particular. Las variables se clasifican en dos tipos:

1) Variable independiente o argumento: Es aquella a la que se le puede asignar valores a nuestro arbitrio de acuerdo a un campo de variación que depende del problema específico.

2) Variable dependiente o función: Es aquella cuyo valor queda determinado al asignar un valor específico a la variable independiente.

Para los propósitos de este curso los valores que pueden tomar estas variables quedan comprendidos dentro del conjunto de los números reales (R).

Constantes: Son cantidades que conservan siempre un valor fijo en el transcurso de un proceso de análisis matemático. Se clasifican en dos grupos:

1. Constantes numéricas o absolutas: Son aquellas que conservan el mismo valor numérico en todas las operaciones, por ejemplo, 4,6, $\sqrt{9}$, π, etc.

2. Constantes arbitrarias o parámetros: Son aquellas a las que se les puede asignar valores numéricos particulares y los conservan durante un proceso de análisis, se acostumbra representarlas con las primeras letras del alfabeto (a,b,c,d ,etc).

Usualmente, cuando consideramos dos variables que se ligan entre sí queda bajo nuestro criterio elegir cuál de ellas es la variable independiente y cual la dependiente, una vez hecha nuestra elección no se permite hacer cambios, a reserva de hacer las transformaciones pertinentes

Por ejemplo, el áreas de un círculo es función de la longitud de su radio, y, en forma recíproca la longitud del radio de un círculo es una función de su área, sin embargo muchas veces es conveniente seguir un criterio para elegir estas variables, uno de estos puede ser la simplificación de las fórmulas y/o procedimientos matemáticos que se usen para un determinado problema.

3. Dominio de una función: Es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente x

4. Rango, codominio, contradominio, o recorrido de una función: Es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente "y" o *f(x)*.

5. Notación de funciones: Es muy común emplear el símbolo *f(x)* para designar una función de x (no debe interpretarse como una multiplicación de *f por x)* se lee como "f de x". Si se tiene la necesidad de distinguir entre varias funciones se pueden emplear otros símbolos como Ø(x), P(X), G(X), etc.

6. Tipos de funciones. Para nuestros propósitos distinguiremos dos tipos de funciones: a) funciones algebraicas y b) funciones trascendentes. Las primeras se pueden construir usando operaciones algebraicas como adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces a partir de polinomios. Las segundas abarcan todas aquellas que no son algebraicas, tales como las trigonométricas, las trigonométricas inversas, las exponenciales y las logarítmicas.

7. Funciones explicitas y funciones implícitas: Las primeras son aquellas que están expresadas en términos de una sola variable, es decir, una de las variables está despejada, por lo general la dependiente. En las segundas, se da una relación entre la variable independiente y la variable dependiente por medio de una ecuación no resuelta para ninguna de las variables.

$y = 20X + 17$……………………………….y es función explicita de x

$y = \frac{x^3 + 8}{x^2 - 5}$ …………………………………y es función explícita de x

$5X + 3Y – 12 = 0$ ----------------------------- Función implícita

$4X + 2X^2 – 6XY^3 + 5Y = 0$ -------------------Función implícita

En resumen, a la variable dependiente (y o *f(x))* se le llama función de "x" (variable independiente) en un intervalo específico, cuando a cada valor de "x" le corresponde uno y solo un valor para *f(x)* o y (recordemos y= *f(x)*).

Las funciones se pueden representar de cuatro maneras:

1. Verbalmente…………………………….. Empleando palabras para describirla

2. Numéricamente………………………… Mediante el uso de una tabla de valores

3. Visualmente…………………………… Representándola mediante una gráfica

4. Matemáticamente…………………….. A través de una fórmula explicita

5.1. Cálculo del valor de una función

Para determinar el valor que adquiere una función dada, cuando a la variable independiente le hemos asignado un valor particular, se procede a sustituir dicha variable por el valor que le asignó y se realizan las operaciones indicadas.

Antes de realizar algunos ejercicios demostrativos es conveniente recordar de sus cursos de álgebra;

a) La división entre cero carece de sentido y nos conduce a errores.

b) Como nuestro intervalo de variación es el conjunto de los números reales, la extracción de raíces negativas con índice par es un error.

Dada la función $f(x) = x^2 - 9x + 14$ calcule su valor para: a) x =0, b) x=3, c) x= (-1), d) x=(b+1)

a) $f(0)= 0^2 – 9(0) + 14 = 0 + 0 + 14 = 14$

b) $f(-1)= 1^2 – 9(-1) + 14 = 1 + 9 + 14 = 24$

c) $f(3)= 3^2 – 9(3) +14 = 9 – 27 + 14 = -4$

d) $f(b + 1) = (b + 1)^2 – 9(b + 1) + 14 = b^2 + 2b + 1^2 – 9b – 9 +14 = b^2 – 7b + 6$

6.1. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE: Ejercicios propuestos.

1. Defina el concepto de relación matemática

2. Cite tres ejemplos de relación

3. Defina el concepto de función matemática

4. Diga tres ejemplos de función

5. Se dice que una función es algebraica cuando ---

6. Se dice que una función es trascendente si ---

7. Una variable es independiente cuando --

8. A la variable dependiente se le conoce también como ---

9. Explique el significado de la notación $f(x)$

10. Dada la función $f(x) = x^2 +6x -2$ calcule su valor para a) x=0, b) x= 2. c) x= -5, d) x = 3, e) x= ½

11. Dada la función $f(X) = X^3 - 5X^2 - 4X + 20$ calcule su valor para: a) x= 1, b) x= 5, c) x= 0 . d) x= 7

12. Dada la función $f(X)= 3X^2 - 2X + 5$ calcule su valor para: a) x=1, b) x=7, c) x= 0 , d) x= z+2

13. Dada la función $f(X)= \frac{1}{x}$. Demostrar que: a) $f(2) - f(b) = f\,\frac{2b}{b-2}$